

CONTENTS 目录

分层滚动卷



单元测评卷（一）A 基础巩固卷 [考查范围：预备知识]	卷 01
单元测评卷（一）B 能力提升卷 [考查范围：预备知识]	卷 03
单元测评卷（二）A 基础巩固卷 [考查范围：函数]	卷 05
单元测评卷（二）B 能力提升卷 [考查范围：函数]	卷 07
单元测评卷（三）A 基础巩固卷 [考查范围：一元函数的导数及其应用]	卷 09
单元测评卷（三）B 能力提升卷 [考查范围：一元函数的导数及其应用]	卷 11
阶段滚动卷（一） [考查范围：第一~三单元]	卷 13
单元测评卷（四）A 基础巩固卷 [考查范围：三角函数、解三角形]	卷 15
单元测评卷（四）B 能力提升卷 [考查范围：三角函数、解三角形]	卷 17
单元测评卷（五）A 基础巩固卷 [考查范围：平面向量与复数]	卷 19
单元测评卷（五）B 能力提升卷 [考查范围：平面向量与复数]	卷 21
单元测评卷（六）A 基础巩固卷 [考查范围：数列]	卷 23
单元测评卷（六）B 能力提升卷 [考查范围：数列]	卷 25
阶段滚动卷（二） [考查范围：第一~六单元]	卷 27
单元测评卷（七）A 基础巩固卷 [考查范围：立体几何]	卷 29
单元测评卷（七）B 能力提升卷 [考查范围：立体几何]	卷 31
单元测评卷（八）A 基础巩固卷 [考查范围：解析几何]	卷 33
单元测评卷（八）B 能力提升卷 [考查范围：解析几何]	卷 35
阶段滚动卷（三） [考查范围：第一~八单元]	卷 37
阶段滚动卷（四） [考查范围：第一~八单元]	卷 39
单元测评卷（九） [考查范围：统计]	卷 41
单元测评卷（十） [考查范围：计数原理、概率、随机变量及其分布]	卷 45
综合测评卷（一） [考查范围：全部单元]	卷 47
综合测评卷（二） [考查范围：全部单元]	卷 49
· 参考答案	卷 51

全品

高考复习方案

CANPOINT®

YN

主编：肖德好

QUANPIN GAOKAO FUXI FANG' AN

分层滚动卷

数学



单元测评卷（一）A

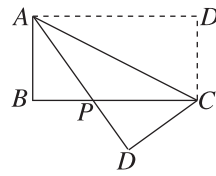
基础巩固卷

本试卷考查范围：预备知识. 本试卷满分150分，考试时间120分钟.

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

- [2024·北京海淀区一模] 已知全集 $U = \{x | -2 \leq x \leq 2\}$, 集合 $A = \{x | -1 \leq x < 2\}$, 则 $\complement_U A =$ ()
 A. $(-2, -1)$ B. $[-2, -1]$
 C. $(-2, -1) \cup \{2\}$ D. $[-2, -1) \cup \{2\}$
- 已知 $p: \exists a > 0$, 方程 $x^2 + ax = 0$ 有实根, 则 $\neg p$ 为 ()
 A. $\forall a > 0$, 方程 $x^2 + ax \neq 0$ 有实根
 B. $\forall a > 0$, 方程 $x^2 + ax = 0$ 无实根
 C. $\forall a > 0$, 方程 $x^2 + ax = 0$ 有实根
 D. $\forall a \leq 0$, 方程 $x^2 + ax = 0$ 无实根
- [2025·新乡模拟] 已知集合 $M = \{x | (x-1)(x-11) \leq 0\}$, $N = \{x | y = \sqrt{5-x}\}$, 则 $M \cap N =$ ()
 A. $[1, 5]$ B. $[1, 5)$
 C. $[5, 11]$ D. $(5, 11]$
- [2024·汕头一模] “ $a > \frac{1}{2}$ ”是“ $\frac{1}{a} < 2$ ”的 ()
 A. 充分不必要条件
 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件
 D. 既不充分也不必要条件
- 已知 $1 < a - b \leq 2$, $2 \leq a + b < 4$, 则 $4a - 2b$ 的取值范围是 ()
 A. $[5, 10]$ B. $(5, 10)$
 C. $[3, 12]$ D. $(3, 12)$
- 已知 $a > 0, b > 0$, 则使 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 4$ 成立的一个充分不必要条件是 ()
 A. $a^2 + b^2 = 1$ B. $a + b \geq 4ab$
 C. $a + b = 1$ D. $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq 8$
- [2025·山东聊城模拟] 若使不等式 $x^2 + (a-1)x - a \leq 0$ 成立的任意一个 x , 都满足不等式 $|3x+2| > 1$, 则实数 a 的取值范围为 ()
 A. $(-\infty, \frac{1}{3}]$ B. $(-\frac{1}{3}, +\infty)$
 C. $(-\infty, \frac{1}{3})$ D. $(\frac{1}{3}, +\infty)$

- [2025·吕梁模拟] 如图, 矩形 $ABCD$ ($AB < AD$) 的周长为 8 cm, 把 $\triangle ACD$ 沿 AC 向 $\triangle ABC$ 折叠, AD 折过去后交 BC 于点 P , 记 $\triangle ABP$ 的周长为 l cm, 面积为 S cm^2 , 则 $\frac{S}{l}$ 的最大值为 ()



- $3 - 2\sqrt{2}$ B. $3 + 2\sqrt{2}$
 C. $6 + 4\sqrt{2}$ D. $6 - 4\sqrt{2}$
- 二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分.
- 已知 $c < 0 < b < a$, 则 ()
 A. $ac < bc$ B. $b^3 + c^3 < a^3$
 C. $\frac{a+c}{b+c} > \frac{a}{b}$ D. $\frac{1}{\sqrt{a}} < \frac{1}{\sqrt{b}}$
 - 设 U 为全集, 集合 A, B, C 满足条件 $A \cup B = A \cup C$, 那么下列各式中不一定成立的是 ()
 A. $B \subseteq A$
 B. $C \subseteq A$
 C. $A \cap (\complement_U B) = A \cap (\complement_U C)$
 D. $(\complement_U A) \cap B = (\complement_U A) \cap C$
 - 已知关于 x 的不等式 $ax^2 + bx + c \geq 0$ 的解集为 $\{x | -3 \leq x \leq 4\}$, 则下列说法正确的是 ()
 A. $a < 0$
 B. 不等式 $cx^2 - bx + a < 0$ 的解集为 $\{x | -\frac{1}{4} < x < \frac{1}{3}\}$
 C. $a + b + c < 0$
 D. $\frac{2}{3b+4} + \frac{c}{2}$ 的最小值为 -4
- 三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分.
- 设集合 $M = \{2, -2, -1\}$, $N = \{x | |x-a| < 1\}$, 若 $M \cap N$ 的真子集的个数是1, 则正实数 a 的取值范围为_____.
 - [2024·东三省三校联考] 若“ $\forall x \in [1, 3], a \leq 2^x + 2^{-x}$ ”为假命题, 则实数 a 的取值范围是_____.
 - 已知正数 x, y 满足 $x + y = 6$, 若不等式 $a \leq \frac{x^2}{x+1} + \frac{y^2}{y+2}$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是_____.

请将正确答案填入下表：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案								
题号	9		10		11			
答案								
题号	12		13		14			
答案								

四、解答题：本题共5小题，共77分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

- (13分) 已知 $m > 0$, 集合 $A = \{x | x^2 + x - 2 > 0\}$, 集合 $B = \{x | |x - 2| < m\}$.
 (1) 当 $m = 3$ 时, 求 A 和 $A \cap (\complement_{\mathbb{R}} B)$;
 (2) 若 $x \in B$ 是 $x \in A$ 的充分不必要条件, 求实数 m 的取值范围.



16. (15 分)

(1)若关于 x 的不等式 $ax^2+bx-12>0$ 的解集为 $\{x|3<x<4\}$,解关于 x 的不等式 $(a+b)x^2+(b-12)x-a<0$;
(2)解关于 x 的不等式 $mx^2+(1-m)x-1<0$.
18. (17 分)

已知函数 $f(x)=\lg(x^2+ax+b)$ 的定义域为集合 A ,集合 $B=\{x|x^2-3mx+2m^2-m-1<0\},U=\mathbf{R}$,且 $(\complement_U A)\cap B=B,(\complement_U A)\cup B=\{x|-2\leq x\leq 5\}$.
(1)试确定 a,b 的值;
(2)求实数 m 的取值范围.
19. (17 分)

已知关于 x 的不等式 $kx^2-2kx-k+1>0$ 的解集为 M .
(1)若 $M=\mathbf{R}$,求实数 k 的取值范围.
(2)若 $M=\{x|x<a$ 或 $x>b\}$,且 $a<0,b>0$,求实数 k 的取值范围.
(3)李华说集合 M 中可能仅有一个整数,试判断李华的说法是否正确?并说明你的理由.

17. (15 分)

解答下列各题.
(1)若 $x>3$,求 $x+\frac{4}{x-3}$ 的最小值.
(2)若正数 x,y 满足 $9x+y=xy$.
①求 xy 的最小值;
②求 $2x+3y$ 的最小值.



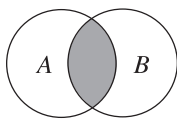
单元测评卷（一）B

能力提升卷

本试卷考查范围：预备知识. 本试卷满分150分，考试时间120分钟.

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A = \{x | \sqrt{x} \leq 1\}$, $B = \{-1, 0, 1, 2, 4\}$, 则图中阴影部分表示的集合为 ()



- A. $\{1\}$ B. $\{-1, 1\}$
 C. $\{0, 1\}$ D. $\{-1, 0, 1\}$
2. [2024·郑州一模] 已知全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x | y = \ln(x+1)\}$, $B = \{x | x^2 - x - 2 < 0\}$, 则 $\{x | x < 2\} =$ ()
- A. $(\complement_U A) \cup B$ B. $(\complement_U B) \cap A$
 C. $\complement_U (A \cup B)$ D. $\complement_U (A \cap B)$
3. 若“ $\exists x \in \mathbf{R}, ax^2 - 3ax + 9 \leq 0$ ”是假命题, 则 a 的取值范围为 ()
- A. $[0, 4]$ B. $[0, 4)$
 C. $(0, 4)$ D. $[4, +\infty)$
4. [2024·齐齐哈尔模拟] 已知数列 $\{a_n\}$ 为等比数列, m, t, p, s 均为正整数, 设甲: $a_m a_t = a_p a_s$; 乙: $m + t = p + s$, 则 ()
- A. 甲是乙的充分不必要条件
 B. 甲是乙的必要不充分条件
 C. 甲是乙的充要条件
 D. 甲是乙的既不充分也不必要条件
5. 已知 $a > b > 1$, 下列不等式一定成立的是 ()
- A. $a + \frac{1}{a} < b + \frac{1}{b}$
 B. $\frac{|c|}{a} < \frac{|c|}{b}$
 C. $ab + 1 > a + b$
 D. $\frac{a}{b} < \frac{a+1}{b+1}$
6. [2024·浙江五校联考] 已知实数 x, y 满足 $x > 3$, 且 $xy + 2x - 3y = 12$, 则 $x + y$ 的最小值为 ()
- A. $1 + 2\sqrt{6}$ B. 8
 C. $6\sqrt{2}$ D. $1 + 2\sqrt{3}$

7. 关于 x 的不等式 $(ax-1)^2 < x^2$ 恰有2个整数解, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $-\frac{3}{2} < a < -1$ 或 $1 < a < \frac{3}{2}$
 B. $-\frac{3}{2} < a \leq -\frac{4}{3}$ 或 $\frac{4}{3} \leq a < \frac{3}{2}$
 C. $-\frac{3}{2} < a \leq -1$ 或 $1 \leq a < \frac{3}{2}$
 D. $-\frac{3}{2} < a < -\frac{4}{3}$ 或 $\frac{4}{3} < a < \frac{3}{2}$
8. 给定数集 M , 若对于任意 $a, b \in M$, 都有 $a+b \in M$, 且 $a-b \in M$, 则称集合 M 为闭集合, 则下列说法中正确的是 ()
- A. 集合 $M = \{-4, -2, 0, 2, 4\}$ 为闭集合
 B. 正整数集是闭集合
 C. 集合 $M = \{n | n = 3k, k \in \mathbf{Z}\}$ 为闭集合
 D. 若集合 A_1, A_2 为闭集合, 则 $A_1 \cup A_2$ 为闭集合

二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分.

9. 下列说法正确的有 ()
- A. “ $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 + 1 = 0$ ”是真命题
 B. “若 $x > 0$, 则 $x^2 > 0$ ”是真命题
 C. “ $a > 2$ ”是“ $a > 5$ ”的必要不充分条件
 D. 设 $a, b \in \mathbf{R}$, 则“ $a+b > 8$ ”是“ $a > 4$ 且 $b > 4$ ”的充分不必要条件
10. [2025·安徽皖豫名校联盟联考] 已知 $a > 0, b > 0$, 且 $2a + b = 4$, 则 ()

- A. $ab \leq 1$ B. $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} \geq 2$
 C. $\sqrt{2a} + \sqrt{b} \leq 2\sqrt{2}$ D. $\frac{b^2}{a} + 4a \geq 12$
11. “对任意的 $m \in [-1, 1]$, 总存在唯一的 $x \in [0, 3]$, 使得 $x^2 - 2x - am - 1 = 0$ ”为真命题的充分不必要条件可以是 ()
- A. $-2 \leq a \leq 2$ B. $a = 0$
 C. $0 < a < 1$ D. $-1 < a < 1$

三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分.

12. [2025·湖南名校联考] 已知 $x > 1, y > 0$, 且 $x + \frac{2}{y} = 2$, 则 $\frac{1}{x-1} + y$ 的最小值是_____.
13. [2025·宁德模拟] 已知 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数. 例如 $[2.1] = 2$, $[-1.3] = -2$, $[0] = 0$. 若 $A = \{y | y = x - [x]\}$, $B = \{y | 0 \leq y \leq m\}$, $y \in A$ 是 $y \in B$ 的充分不必要条件, 则 m 的取值范围是_____.
14. 定义 $\max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 表示 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 中的最大值. 设 $0 < m < n < p < 2$, 已知 $n \geq 3m$ 或 $m + 2n \leq 3$, 则 $\max\{n-m, p-n, 2-p\}$ 的最小值为_____.

请将正确答案填入下表：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案								
题号	9		10		11			
答案								
题号	12		13		14			
答案								

四、解答题：本题共5小题，共77分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (13分) [2025·郑州模拟] 已知集合 $A = \{x^2, 2x-1, -4\}$, $B = \{x-5, 1-x, 9\}$, $A \cap B = \{9\}$.
- (1) 求集合 A, B ;
 (2) 定义集合 A, B 的一种运算 $A * B = \{x | x = x_1 + x_2, \text{ 其中 } x_1 \in A, x_2 \in B\}$, 求 $A * B$.



16. (15 分)已知 $x>0,y>0,x+y-2=a(xy-3)$.

(1)当 $a=0$ 时,求 xy 的最大值;

(2)当 $a=1$ 时,求:

① $x+2y$ 的最小值;

② $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{y-1}$ 的最小值.

17. (15 分)关于 x 的不等式 $(x+b)(ax+5)>0$ 的解集为 $\{x|x<-1 \text{ 或 } x>3\}$.

(1)求关于 x 的不等式 $x^2+bx-2a<0$ 的解集;

(2)求关于 x 的不等式 $\frac{x-1}{ax-b}>1$ 的解集.

18. (17 分)[2025·吉林东北师大附中模拟] 李聪毕业后帮助某地打造“生态果园特色基地”,他决定为该地改良某种水果树,增加产量,提高收入.已知此水果树的单株产量为 W (单位:千克),投入的成本为 $30x$ (单位:元).调研过程中发现: W 与 x 之间满足关系式 $W(x)=$

$$\begin{cases} 3x^2+\frac{34}{3}, 0\leqslant x\leqslant 2, \\ \frac{32x}{x+1}+x, 2<x\leqslant 5, \end{cases}$$

这种水果的市场售价为 10 元/千克,且供不应求,

水果树单株获得的利润为 $f(x)$ (单位:元).

(1)求 $f(x)$ 的解析式.

(2)当投入成本为多少时,该水果树单株获得的利润最大? 最大利润是多少?

19. (17 分)正整数集 $A=\{m+1,m+2,m+3,\cdots,m+3n\}$,其中 $m\in\mathbf{N}$, $n\in\mathbf{N}^*$.将集合 A 拆分成 n 个三元子集,这 n 个集合两两没有公共元素.若存在一种拆法,使得每个三元子集中都有一个数等于其他两数之和,则称集合 A 是“三元可拆集”.

(1)若 $m=1,n=3$,判断集合 A 是否为“三元可拆集”,若是,请给出一种拆法;若不是,请说明理由.

(2)若 $m=0,n=6$,证明:集合 A 不是“三元可拆集”.

(3)若 $n=16$,是否存在 m 使得集合 A 是“三元可拆集”? 若存在,请求出 m 的最大值并给出一种拆法;若不存在,请说明理由.

阶段滚动卷（一）

本试卷考查范围：第一～三单元. 本试卷满分 150 分，考试时间 120 分钟.

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 若集合 $A = \{x | x \leq 1\}$, $B = \{x | \ln x < 1\}$, 则 $(\complement_{\mathbf{R}} A) \cap B =$ ()

- A. $(0, 1)$ B. $(0, e)$
C. $(1, e)$ D. $(e, +\infty)$

2. [2025 · 山东新泰一中二模] “ $m = -2$ 或 $m = 3$ ”是“幂函数 $f(x) = (m^2 - m - 5)x^{m^2 + m - 3}$ 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 充要条件
C. 必要不充分条件 D. 既不充分也不必要条件

3. 已知 $a > b, c < d < 0$, 则 ()

- A. $a + c > b + d$ B. $a + c^2 > b + d^2$
C. $ac > bd$ D. $ac^2 > bd^2$

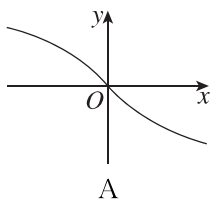
4. 函数 $f(x) = \frac{x}{x-1}$ 的图象在点 $(2, f(2))$ 处的切线方程为 ()

- A. $x - y = 0$ B. $x + y - 2 = 0$
C. $x + y - 4 = 0$ D. $x - y + 2 = 0$

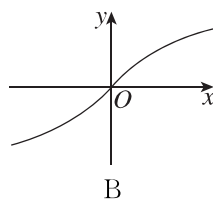
5. 已知 $5^a = 2, b = \log_2 3, c = \frac{1}{2} \log_5 9$, 则 a, b, c 的大小关系为 ()

- A. $a < b < c$ B. $a < c < b$
C. $b < a < c$ D. $c < b < a$

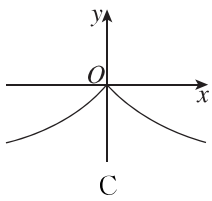
6. 已知符号函数 $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$ 则函数 $f(x) = \operatorname{sgn}(x) \cdot \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 的图象大致为 ()



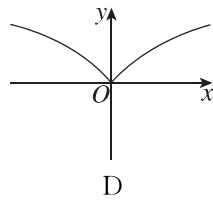
A



B



C



D

7. 已知函数 $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 4ax + a^2 \ln x$ 在 $x = 1$ 处取得极大值，则参数 a 的值为 ()

- A. 1 B. 3
C. 1 或 3 D. 2 或 3

8. [2025 · 武汉华中师大一附中模拟] 定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$, 且对任意实数 x 都有 $f(-x) - f(\frac{3}{2} + x) = 0, f(2024) = \frac{1}{e}$. 若 $f(x) +$

$f'(-x) > 0$, 则不等式 $f(x+1) > \frac{1}{e^x}$ 的解集是 ()

- A. $(3, +\infty)$ B. $(-\infty, 3)$
C. $(1, +\infty)$ D. $(-\infty, 1)$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9. [2025 · 衢州质检] 已知 $a > 0, b > 0$, 则下列说法正确的是 ()

- A. 若 $a + b = 1$, 则 $\log_2 a + \log_2 b \leq -2$
B. 若 $a + b = 1$, 则 $\sqrt{a} + \sqrt{b} < 1$
C. 若 $a - b = 1$, 则 $2^a - \frac{1}{2^b} > 1$
D. 若 $a - b = 1$, 则 $a^2 + b^2 > 1$

10. [2025 · 济南质检] 已知函数 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数，且 $f(x + 1) + f(x + 2) = -f(x)$, 则 ()

- A. $f(1) = 1$
B. $f(x)$ 的一个周期是 3
C. $f(x)$ 的图象的一个对称中心是 $(\frac{3}{2}, 0)$
D. $f(10) + f(11) + f(12) = 0$

11. 设函数 $f(x) = x^3 - x + 3, g(x) = \frac{f(x)}{x} + 1, f(x)$ 的导数为 $f'(x)$, 则 ()

- A. $f'(-1) = 2$
B. 当 $f'(x_0) = 2$ 时, $x_0 = -1$
C. 曲线 $y = g(x)$ 在点 $(1, 4)$ 处的切线方程为 $x + y - 5 = 0$
D. 当 $x > 0$ 时, $|g(-x)| < |g(x)|$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 若“ $\exists x \in \mathbf{R}, mx^2 + mx - 2 \geq 0$ ”为假命题，则 m 的取值范围是 _____.

13. [2025 · 福建名校联盟联考] 已知函数 $f(x) = (x - a)^3 \ln \frac{x+b}{x}$ 的图象关于直线 $x = 1$ 对称，则 $a + b =$ _____.

14. [2025 · 肇庆一模] 已知函数 $f(x) = (x + b - 1)e^x + \frac{1}{2}ax^2 + abx - 1$ ($b > 0$) 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，则 $\frac{\sqrt[b]{e}}{a}$ 的最大值为 _____.

请将正确答案填入下表：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案								
题号	9			10			11	
答案								
题号	12			13			14	
答案								

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (13 分) 已知 $a \in \mathbf{R}, p: \exists x \in \{x | 1 < x < 2\}, (a - 2)x - 1 > 0; q: \forall x \in \mathbf{R}, x^2 + ax + 4 > 0$.

- (1) 写出 p 的否定，并求当 p 的否定为真命题时，实数 a 的取值范围；
(2) 若 p, q 中有且只有一个为真命题，求实数 a 的取值范围.



16. (15 分) 设函数 $f(x) = x^3 + bx + c$, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ 处的切线与 y 轴垂直.
- (1) 求 b ;
- (2) 若 $f(x)$ 有一个绝对值不大于 1 的零点, 证明: $f(x)$ 所有零点的绝对值都不大于 1.

17. (15 分) 企业研发部原有 80 人, 年人均投入 a ($a > 0$) 万元, 为了优化内部结构, 现把研发部人员分为两类: 技术人员和研发人员, 其中技术人员有 x 名 ($x \in \mathbf{N}$ 且 $45 \leq x \leq 75$), 调整后, 技术人员的年人均投入为 $a\left(m - \frac{2x}{25}\right)$ (其中 $m > 0$) 万元, 研发人员的年人均投入增加 $4x\%$.
- (1) 要使调整后研发人员的年总投入不低于调整前的 80 人的年总投入, 则优化结构调整后的技术人员人数 x 的取值范围是多少?
- (2) 若研发部新招聘 1 名员工, 原来的研发部人员调整策略不变, 且对任意一种研发部人员的分类方式, 需要同时满足下列两个条件: ① 技术人员的年人均投入始终不减少; ② 调整后研发人员的年总投入始终不低于调整后技术人员的年总投入. 请分析是否存在满足上述条件的正实数 m ? 若存在, 求出 m 的值; 若不存在, 请说明理由.

18. (17 分) 已知函数 $f(x) = ax - \ln x$, $x \in (0, e]$, $g(x) = \frac{\ln x}{x}$, 其中 e 是自然对数的底数, $a > 0$.
- (1) 讨论当 $a = 1$ 时, 函数 $f(x)$ 的单调性和极值.
- (2) 求证: 当 $a = 1$ 时, 对任意 $x_1 \in (0, e]$, $x_2 \in (0, +\infty)$, $f(x_1) > g(x_2) + \frac{1}{2}$.
- (3) 是否存在正实数 a , 使 $f(x)$ 的最小值是 3? 若存在, 求出 a 的值; 若不存在, 请说明理由.

19. (17 分) [2025 · 广东部分学校联考] 现定义: 若对于集合 M 满足对任意 $a, b \in M$, 都有 $\frac{a}{b} \notin [2, 3]$, 则称 M 是可分比集合.
- (1) 证明: $\{1, 4, 6, 7\}$ 是可分比集合.
- (2) 设集合 A, B 均为可分比集合, 且 $A \cup B = \{1, 2, \dots, n\}$, 求正整数 n 的最大值.
- (3) 探究是否存在正整数 k , 对于任意正整数 n , 均存在可分比集合 $M_1, M_2, \dots, M_k$, 使得 $M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_k = \{1, 2, \dots, n\}$? 若存在, 求 k 的最小值; 若不存在, 说明理由.